DUPLICAÇÃO DO QUADRADO POR RECORTE E COLAGEM

Edilene Simões Costa dos Santos, Dr. Cristiano Alberto Muniz, Dra. Maria Terezinha Jesus Gaspar
edilenesc@gmail.com, cristianoamuniz@gmail.com, mtjg.gaspar@gmail.com

UnB-Brasil, UnB-Brasil, UnB-Brasil

Tema V.3 - Historia de la Matemática y su Inclusión en el Aula.
Nivel Primaria (6 a 11 años)
Modalidad Comunicación brevePalavras-chave: História da Matemática. Matemática. Ensino e aprendizagem.

Resumo

Esse estudo refere-se a da apresentação e análise da atividade proposta aos alunos acerca do problema da duplicação do quadrado. Essa atividade refere-se a uma a sequência didática da nossa pesquisa de doutorado que discute as possíveis relações entre a Matemática e sua história pertinentes ao ensino e aprendizagem do conceito de área. A História da Matemática é tomada como elemento norteador de decisão quanto aos procedimentos pedagógicos utilizados na construção do conceito pelo estudante. O aporte teórico apresenta questões epistemológicas e metodológicas relacionadas à apropriação da História da Matemática como recurso didático para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, também vinculadas à Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996, 2003). A metodologia de pesquisa utilizada aproxima-se da engenharia didática (Artigue, 1996). A efetivação da proposta direcionada pelos objetivos do trabalho ocorre por meio da organização, aplicação e análise de sequência didática realizada em duas turmas de quinto ano do ensino fundamental, em duas escolas da rede de ensino público do Distrito Federal-Brasil. A atividade fundamentada na concepção histórica utilizando recorte e colagem propiciou aos alunos reconhecerem que a área do quadrado construído sobre a diagonal de um quadrado é o dobro da área do quadrado dado.

Introdução

Este trabalho é um recorte da pesquisa de doutorado, em desenvolvimento, na Faculdade de Educação da Universidade de Brasília, intitulada *História da Matemática como instrumento didático para aprendizagem do conceito da grandeza e de medida de área no quinto ano do ensino fundamental*. Temos por objetivo, nesta comunicação breve, apresentar a análise de parte da sequência didática desenvolvida e aplicada no trabalho supracitado, cuja tese entende que mobilizar didaticamente a História da Matemática na ação pedagógica pode proporcionar, de forma significativa, a construção do conceito da grandeza e medida de área pelos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental.

Nosso trabalho não pretende que a história seja explicitamente reconstruída ou integrada à matemática, tampouco, deixá-la como motivação inicial de conteúdos curriculares, mas constituí-la como pano de fundo do processo de aprendizagem dando sustentação ao processo de construção conceitual. Propomo-nos a fazer uso da história para tomar decisões pedagógicas quanto ao ensino do conceito de medida de área e procedimentos para o seu cálculo. Mendes (2006) acredita que, entre as dificuldades enfrentadas por professores que desejam ter um recurso didático, na história da matemática, estão a falta de informação sobre o desenvolvimento histórico da matemática e de propostas metodológicas de utilização das mesmas no ensino da matemática escolar. Segundo esse autor, essas dificuldades, especificamente, dão-se ao fato de não existir uma história da matemática exclusivamente centrada na ação pedagógica, e sim uma "história da matemática feita pelos historiadores, preocupados com o contexto científico da matemática" (p. 97).

A pesquisa teve por suporte teórico-metodológico Amma (1979), Artigue (1996), Douady e Perrin-Glorian (1989), Duval (1994), Mendes (2006, 2009), Vergnaud (1996, 2003), Joseph (2000), Katz (1998), entre outros.

Como metodologia de trabalho, optamos por uma aproximação à engenharia didática de Artigue (1996), que norteou a estruturação do estudo na busca da compreensão das estratégias cognitivas estabelecidas na geração das ideias matemáticas dentro da perspectiva histórica do conhecimento matemático. A sequência didática foi aplicada em duas turmas de quinto ano da rede pública de ensino do Distrito Federal.

Nesta perspectiva, as atividades desenvolvidas pelos estudantes, as observações feitas em sala de aula, as entrevistas com os alunos, e os encontros de estudo e planejamento com as professoras foram analisados sob o olhar da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996, 2003), na qual a constituição de um conceito depende de três dimensões do conhecimento, que estão inter-relacionadas, o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, o conjunto de invariantes operatórios e o conjunto de representações simbólicas utilizadas para resolução do problema.

A sequência elaborada à luz da concepção histórica do conhecimento

A concepção da sequência didática resultou em quatorze atividades. A atividade analisada nessa comunicação breve, assim como as demais, é constituída de fundamentação histórica, de objetivos pontuais, material e procedimentos. Por conseguinte, as atividades não foram organizadas com a meta inicial de informar explicitamente ao aluno os fatos relativos à história da construção, pela humanidade, do objeto matemático em estudo. No entanto, foram imaginadas, planejadas e construídas fazendo uso de bases históricas com objetivo de proporcionar aos estudantes condições favoráveis à apropriação do novo saber.

Em algumas atividades, trabalhamos com a história de maneira implícita, em outras explicitamente, nesse caso, o conteúdo histórico pôde chegar ao aluno de diferentes formas. Na sequência didática, as atividades estão encadeadas entre si de modo que os procedimentos de uma sejam referência para a seguinte. Esta é a oitava a ser desenvolvida.

Passemos, então, a apresentar a atividade e sua análise.

A atividade em estudo: duplicação do quadrado

Objetivos: Resolver o problema da duplicação do quadrado e reconhecer que a área do quadrado construído sobre a diagonal de um quadrado é o dobro da área do quadrado dado.

Material: régua, tesoura, canudo, quadrados de papel.

Procedimentos: Contar uma história de Sócrates e o menino escravo. A seguir, apresentar um desafio para a turma e entregar os quadrados para cada aluno.

A história: Sócrates era um filósofo grego que viveu entre 469 a 399 a.C. Certo dia ele estava conversando com seu amigo Teetetos e resolveu mostrar como um menino poderia aprender uma coisa nova. Ele chamou um menino e perguntou se ele conhecia o quadrado. Ele então entregou um quadrado para o menino. Em seguida, ele perguntou ao garoto qual era a área desse quadrado. O menino sabia como encontrar a área do quadrado. Ele, então, lançou o seguinte desafio para o menino: Eu quero que você encontre o lado do quadrado que tem o dobro da área do quadrado que eu lhe dei. O menino, com a ajuda de Sócrates, resolveu o desafio.

Desafio: Dado um quadrado, construir outro que tenha o dobro da área do quadrado dado.

Passos do procedimento: após a história e a proposta de desafio, entregamos um quadrado para cada aluno. Perguntamos se era possível resolver o problema utilizando apenas o quadrado que receberam. Por quê? Questionamos acerca da necessidade de receberem mais papel do que já tinham. Demos outro quadrado de mesma área, para o caso dos alunos precisarem de outro quadrado. Conduzimos os alunos na descoberta de qual das figuras construídas anteriormente os ajudariam a resolver o problema; depois de resolvido o problema, por meio de perguntas, levamos os alunos a perceberem que o lado do novo quadrado é a diagonal do quadrado dado. Pedimos aos alunos que colassem o quadrado obtido em uma folha e escrevessem uma frase relacionando o lado do novo quadrado com a diagonal do quadrado dado. Ao final, comentamos: vocês viram que Sócrates, por meio de perguntas, ajudou o menino grego a resolver o desafio de achar um quadrado que tivesse o dobro da área de um quadrado dado. Pessoas de diferentes lugares e que viveram em diferentes épocas ou por diversão ou para resolver um problema do cotidiano de seu povo resolveram o desafio de duplicação do quadrado. Pedimos, então, que alguns alunos comentassem como resolveram o desafio.

Análises da atividade

Na análise *a priori*, consideramos que o fato da medida da diagonal ser um número irracional poderia configurar uma dificuldade da atividade para o aluno. Resolvemos trabalhar com uma unidade de medida visível e papável aos alunos. Então, acordamos com eles o estabelecimento de uma unidade de medida de comprimento, "um canudinho", e uma unidade para medir área, no caso, um quadrado cujo lado meça um canudinho.

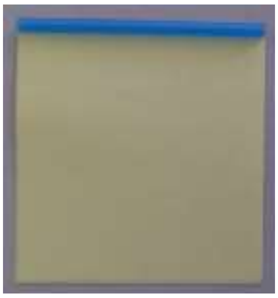


Figura 8A

Entregamos para cada aluno um canudinho (haste de cotonete ou pirulito) e um quadradinho. Informamos que aquele canudinho media uma unidade de medida igual a um canudinho. Uma aluna logo comentou que ele media cinco centímetros. Em seguida, todos os alunos da turma passaram a medir o canudo com a régua. Os alunos demonstravam a necessidade de medida explícita para a realização da atividade matemática. Isso pode estar na concepção de uma atividade matemática essencialmente aritmética, fruto da cultura escolar contemporânea.

Nessa circunstância, aproveitamos para envolver o estudante em uma situação de definição de unidade padrão de medida por meio de uma votação e de transformação de uma unidade de medida em outra. Em continuidade, entregamos outro quadrado e perguntamos qual era a área desse quadrado. Então, os alunos utilizaram o primeiro quadrado dado como unidade de medida. Disseram que cabiam quatro quadradinhos no novo quadrado. Questionamos como sabiam que eram quatro quadradinhos? Um respondeu prontamente que era por visualização e, os outros concordaram. Pedimos para que eles provassem essa afirmativa.

Figura 8B

Foi quando recobriram o quadrado com quatro quadradinhos. Depois de algumas discussões e exemplificações concluímos que a área do quadrado do exercício é igual a quatro quadrados de lado igual a um canudo.

Definida a questão da unidade de medida, passamos para a questão seguinte. Entregamos um quadrado a cada aluno e contamos uma história de Sócrates e o menino escravo e encerramos a história com a seguinte pergunta: será que vocês conseguem resolver esse desafio? Alguns encontraram um quadrado com a metade da área dada. Esse havia sido o desafio da atividade anterior, a número sete. Após discutirmos tal questão, perguntamos se com um quadrado daria para encontrar outro com o dobro da área. Como a resposta foi não, perguntamos quantos quadrados eles precisariam, e eles responderam dois quadrados. Entregamos mais um quadrado a cada aluno. Logo, eles os juntaram, afirmando que a área era o dobro.

Figura 8C

Mediamos: a figura tem o dobro da área do quadrado dado, mas ela é um quadrado? Alguns disseram que era impossível, enquanto outras perguntaram se poderiam recortar um dos quadrados. Respondemos que eles poderiam recortar os dois se considerassem necessário. Julgamos tal questionamento uma consequencia das experiências realizadas nas atividades anteriores da sequência didática em questão. Eles conseguiram! Consideramos que tal “sucesso” se deu devido o encadeamento entre as atividades e, por conseguinte, pela retomada de procedimentos realizados em atividades anteriores.

Ao término, pedimos para os alunos colarem o quadrado formado na folha e escreverem o procedimento adotado para construí-lo. As falas abaixo representam as ideias agrupadas por semelhanças:

“Eu dobrei os quadrados dados formando dois triângulos, dobrei os triângulos três vezes cada, e cortei as linhas, formando dezesseis triângulos pequenos, depois formei um medi com os canudos o quadrado e deu doze canudos no total, e três canudos em cada lado. O lado do quadrado maior tem o mesmo tamanho da medida da diagonal do quadrado dado. Portanto, a área é duas vezes maior.”

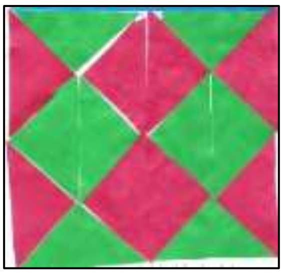
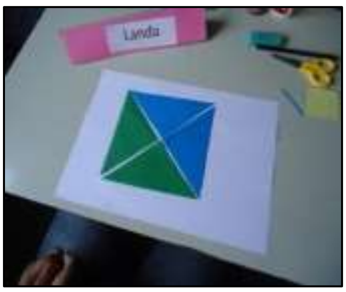


Figura 8D



"Eu peguei dois quadrados grandes e cortei ao meio ficou 4 triângulos,, depois montei um quadrado, o dobro do grande. O lado desse quadrado mede 2,8 canudos. O lado do quadrado maior tem o mesmo tamanho da medida da diagonal do quadrado dado. Portanto, a área é duas vezes maior."

Os procedimentos adotados demonstram a percepção dos alunos de que quadrados podem ser transformados em triângulos e, que a área da figura formada pela reorganização das partes é igual à soma das áreas de tais partes.

"Eu recortei os dois quadrados que a professora me deu e nas pontas do quadrado eu dobrei, depois de eu ter cortado nas pontas eu dobrei no meio desses triângulos pequenos e formou um triângulo grande. Aí eu comecei a montar, depois de duas tentativas eu consegui montar. O lado do quadrado maior tem o mesmo tamanho da medida da diagonal do quadrado dado. Portanto, a área é duas vezes maior ou a área é o dobro da área dada."


Figura 8F

A figura aponta para a necessidade do aluno em constatar a medida do lado do quadrado por ela construído. Ela recortou outro triângulo ao longo da diagonal e com ela mediu o lado do quadrado construído. Mais alunos realizaram esse procedimento. Constatamos com isso que alguns alunos apresentaram dificuldade em perceber que o lado do quadrado por ele construído ela igual à medida da diagonal do quadrado dado. Então, retomamos o movimento com as figuras, e pedimos que retornassem ao quadro inicial.

Os estudantes fracionaram os quadrados em triângulos e esses em outros triângulos, então reorganizaram essas partes em um quadrado, que tinha o dobro da área do quadrado dado. Essa certeza vinha da experiência concreta de manipular todas as partes de dois quadrados de áreas iguais para formar um quadrado. Duval (1994) denomina essa operação de "modificação mereológica", que consiste na divisão de uma figura em partes, para em seguida formar outra. Pela apreensão perceptiva, o aluno interpreta a forma da figura em uma situação geométrica. Para esse autor, essa operação realizada pelos alunos em questão é uma sequência de tratamento possibilitada pela operação com as figuras, ou seja, a obtenção da área do quadrado pela soma da área de dois quadrados dados. Sendo que as áreas dos quadrados dados são iguais.

Esse método de decomposição e recomposição de figuras provavelmente foi adotado pelos egípcios e pelos antigos geômetras chineses, que calculavam com precisão área de algumas figuras como retângulos, triângulos e trapézios isósceles.

Euclides apresenta procedimento geral para transformar um polígono qualquer em um quadrado de mesma área. Para Hogben (1958), uma das principais estratégias utilizadas por Euclides em suas demonstrações era a decomposição dos polígonos em triângulos. Ele demonstrou que qualquer figura limitada por lados retos pode ser dividida em triângulos.

Ao longo do processo da resolução do desafio, por meio da nossa mediação, os alunos foram construindo os seguintes teoremas-em-ação (Verganaud, 1996):

"Uma unidade de medida pode ser transformada em outra unidade".

"Uma unidade de área quadrática é quando a unidade de medida de área é um quadrado de lado igual a uma determinada unidade de medida".

"Para dobrar a área de um quadrado é preciso somar dois quadrados de áreas iguais".

"Dois quadrados iguais justapostos formam um retângulo com o dobro da área de um quadrado dado".

"A soma da área dois quadrados iguais pode ser igual à área de um retângulo formado pelos dois quadrados".

"A soma de dois quadrados dá um quadrado, para isso temos que transformar os quadrados em triângulos com um ângulo reto".

"Um quadrado dividido ao meio, pela diagonal, forma dois triângulos de áreas iguais".

"Quando um quadrado é formado a partir de dois quadrados iguais, a medida do lado do novo quadrado não é duas vezes o lado do quadrado dado, mas a medida da área do novo quadrado é duas vezes o dobro de um quadrado dado".

"Quando a área de um quadrado mede o dobro da medida da área de um quadrado dado, a medida do seu lado é igual à medida da diagonal do quadrado dado".

Os conceitos em ação mobilizados pelos alunos:

"A soma de dois triângulos retângulos isósceles forma um quadrado".

"Um quadrado pode ser decomposto em triângulos".

Por fim, institucionalizamos que a medida da área do quadrado construído sobre a diagonal de um quadrado dado é o dobro da área desse quadrado.

A cada atividade que compõe a sequência didática analisamos a evolução temporal do aluno por meio de suas produções e a partir da verificação dos teoremas em ação produzidos para que eles chegassem à formalização do conceito de área. A análise, por meio dos desenhos e figuras construídas, dá significação do conhecimento pelos alunos e a identificação nas situações dos teoremas em ação e dos conceitos em ação apontam a evolução temporal do conhecimento dos alunos. Isso têm nos ajudado a perceber a compreensão que os estudantes têm no processo de formação do conceito de área e sua medida.

Referências

Amma, S. T. A. (1979). Geometry in Ancient and Medieval India (1a ed.). Índia: Motilal Banarsidass.

Artigue, M. (1996). Engenharia didática. In: Brun, J. Didáctica das matemáticas. (M. J. Figueiredo, trad.). Lisboa: Instituto Piaget, 193-217.

Distrito Federal. (2010). Diretrizes curriculares da rede pública de educação básica do Distrito Federal. Brasília: SEED.

Douady, R., & Perrin-Glorian, M. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics 20. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 387-424

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnememts d'une figure dans une demarche géométrique. N° 17. IREM de Strasbourg, 121-137.

Hogben, L. (1956). Maravilhas da matemática: influência e função da matemática nos conhecimentos humanos (4a ed.). Rio de Janeiro: Globo.

Joseph, G. G. (2000). The crest of the peacock (2a ed.). USA: Princeton University Press.

Katz, V. J. (1998). A history of mathematics: an introduction. (2a ed.). USA: Addison-Wesley Educational Publishers Inc.

Mendes, I. A., Fossa, J. A., & Valdés, J. E. N. (2006). A História como um agente de cognição na Educação Matemática. Porto Alegre: Sulina.

Mendes, I. A. (2009). Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos Campos Conceituais. In: Brun, J. Didáctica das Matemáticas, (M. J. Figueiredo, trad.). Lisboa: Instituto Piaget. p. 155-191.

_____. (2003). A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. Por que ainda há quem não aprende?: A teoria. Petrópolis: Vozes.